Problème 1

Soient les intégrales $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t$ avec $0 < x < 1$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\ \mathrm{d}t$.

1) Évaluer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k$, déduisez-en une expression de $\dfrac{1}{1+t}$ incluant cette somme.

2) Montrer que l'intégrale $I(x)$ est convergente.

3) Montrer que $I(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+x} + R_n(x)$ et donner l'expression intégrale de $R_n(x)$.

4) Montrer que $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$ est convergente, et que $I(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$.

5) a- Montrer que pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_0^1 t^k \ln(t)\ \mathrm{d}t = \frac{-1}{(k+1)^2}$.

b- Montrer que $J = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} + T_n$ avec $T_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{1+t}\ \mathrm{d}t$.

c- Montrer que $|T_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$, en déduire que $J = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

d- Sachant que $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que $J = -\dfrac{\pi^2}{12}$

Problème 2

Partie I

On considère l'ensemble des matrices à coefficients complexes $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
On note I et J les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

I.1) Calculer J^2.

I.2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres (à coefficients complexes) de la matrice J.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $M = aI + bJ$ où a et b sont des nombres complexes.

I.3) Calculer M^2 et M^3.

I.4) a- Montrer que si X est un vecteur propre pour la matrice J, alors X est aussi vecteur propre pour toute matrice M de $\mathcal{E}$.

b- Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres (que l'on exprimera en fonction de a et b) d'une matrice M de $\mathcal{E}$.

c- Les matrices de $\mathcal{E}$ sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

I.5) Calculer M^n pour n entier naturel.

Partie II

Soit α et β deux réels non nuls. On note f_1 et f_2 les fonctions numériques réelles définies par :
$f_1(x) = \cos(\beta x)e^{\alpha x} \quad f_2(x) = \sin(\beta x)e^{\alpha x}$
$\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions : $\mathcal{F} = \left\{ f \mid f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

II.1) Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.

II.2) Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathcal{F}$.

II.3) Donner la dimension de $\mathcal{F}$.

On considère l'application φ définie sur $\mathcal{F}$ qui à f associe f', fonction dérivée de f.

II.4) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

II.5) Donner la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.

II.6) φ est-elle une application bijective de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}$? Si oui donner M^{-1}.

II.7) Donner un triplet (r, s, t) de $\mathbb{R}^3$ tel que $rM^2 + sM + tI = 0$ où 0 désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. *On peut remarquer que* $M - \alpha I = \beta J$ et utiliser le résultat de I.1.

II.8) Montrer que toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre que vous donnerez.

II.9) Donner dans $\mathcal{F}$ l'unique primitive F de la fonction $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

II.10) En utilisant ce qui précède, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(4\cos(3x)e^{4x} - 3\sin(3x)e^{4x}\right)\, \mathrm{d}x$.

Problème 3

On considère les fonctions x et y de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$x(t) = \sin^2 t \text{ et } y(t) = (1 + \cos t)\sin t$$

1) Montrer que x et y sont périodiques de périodes à préciser.

2) Préciser les parités de x et y.

3) Donner le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle $[0, \pi]$.

4) Donner sur votre copie le tableau de valeurs ci-dessous rempli :

t	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
$x(t)$					
$y(t)$					
$x'(t)$					
$y'(t)$					

5) Préciser la limite de $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ quand t tend vers 0, puis quand t tend vers π.

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. On se propose d'étudier et de tracer la courbe Γ paramétrée par :

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to \mathcal{P} \\ &t \mapsto M(t) = \left(\sin^2 t, (1 + \cos t)\sin t\right) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

6) On appelle Γ_0 la partie de la courbe Γ obtenue en prenant t dans l'intervalle $[0, \pi]$.
Représenter sur une figure la courbe Γ_0 en plaçant avec soin les points correspondant aux valeurs 0, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, π de t, ainsi que les tangentes à la courbe en ces points (On peut prendre $\sqrt{3} \approxeq 1,7$).

7) Montrer que Γ s'obtient à partir de Γ_0 à l'aide d'une symétrie à préciser.

Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $M_1 = M(t)$ et $M_2 = M(\pi + t)$.

8) Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont orthogonaux.

9) Déterminer une représentation paramétrique de l'ensemble $\mathcal{C}$ des milieux des segments $[M_1, M_2]$ quand t varie. On notera $(X(t), Y(t))$ cette représentation paramétrique de $\mathcal{C}$.

10) Calculer $\left(X(t) - \dfrac{1}{2}\right)^2 + Y^2(t)$ sous forme simplifiée. En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{C}$. Préciser la nature de $\mathcal{C}$.